Listy Biometryczne - Biometrical Letters
Vol.XXVI (1989), No.1,2, 57-69

O NIEKTÓRYCH PROBLEMACH DOTYCZĄCYCH STOSOWANIA WSPÓŁCZYNNIKA ZMIENNOŚCI

Bogdan Kotkowski, Waldemar Ratajczak

Instytut Geografii Społeczno-Ekonomicznej
i Planowania Przestrzennego UAM w Poznaniu

Streszczenie

Praca dotyczy współczynnika zmienności Vx, który w literaturze nazywany jest względną miarą zmienności cechy X. Pokazano, że dla cechy mającej rozkład normalny, współczynnik Vx nie powinien być wyznaczany za pomocą estymatora $\hat{V}x = S/\bar{X}$ gdyż nie istnieje wówczas jego wartość oczekiwana. Tak więc nie ma nieobciążonego estymatora współczynnika zmienności. Wynika to stąd, iż wartości Vx są silnie uzależnione od rodzaju skali w jakiej dokonuje się pomiarów cechy X. Praktycznie tylko pomiary wykonane w skali ilorazowej mogą być przedmiotem analizy przy pomocy współczynnika zmienności Vx

1. WSTĘP

W statystyce popularną miarą zmienności względnej cechy ilościowej X jest współczynnik zmienności V_x. Zaproponowany przez K. Pearsona w 1885 r., jako iloraz odchylenia standardowego i średniej arytmetycznej (wyrażony w procentach), jest polecany w każdym niemal podręczniku statystyki i chętnie wykorzystywany w licznych zastosowaniach. Podkreśla się przy tym jego korzystne (w porównaniu z wariancją i odchyleniem standardowym) własności, które według niektórych autorów (por. Szulc (1968), Lange, Banasiewicz (1970), Blalock (1975) są następujące:

(1) możliwość porównywania zmienności tej samej cechy ilościowej, dotyczącej dwóch różnych populacji,

(2) możliwość porównywania zmienności różnych ocen ilościowych dotyczących tej samej zbiorowości lub różnych zbiorowości (gdyż jest to liczba niemianowana).

Ponadto w niektórych pracach (Yule, Kendall (1966), jako pewne

---

Słowa kluczowe : współczynnik zmienności, skale pomiaru, obciążenie estymatora

ograniczenie stosowalności współczynnika zmienności, podaje się możliwość osiągnięcia przez średnią (w pewnych sytuacjach) wartości bliskich zeru, co w konsekwencji prowadzić może do nieokreśloności współczynnika zmienności. Ograniczenie to stanowi istotną wadę tego współczynnika, ma ono jednak swoje źródło w szerszym kontekście, dotyczącym skali, w jakiej dokonuje się pomiaru badanej cechy. Jest to szczególnie widoczne, gdy rozpatrywaną cechą jest np. temperatura. Jeśli bowiem określa się np. średnią temperaturę stycznia jakiegoś obszaru na podstawie obserwacji wieloletnich. to średnia ta może być równa zeru w skali Celsjusza, co jest równoważne 32^{o} w skali Fahrenheita. Takie średnie doprowadzą oczywiście do całkiem różnych wniosków na temat współczynników zmienności dotyczących tej samej populacji (styczniów). Przyczyną jest wykorzystanie do pomiaru temperatury skali interwałowej, która ma umowne zero (jak widać, różne dla skali Celsjusza i Fahrenheita). Naturalnie tego rodzaju sytuacje mogą wystąpić przy innych pomiarach wykorzystujących skalę interwałową (skale stosowane w procedurze pomiaru scharakteryzowano krótko poniżej).

Problem skali pomiaru ujawnia się szczególnie wtedy, gdy zauważy się podobieństwo pomiędzy współczynnikiem zmienności, a definicją błędu względnego. Można bowiem przyjąć, że wartość oczekiwana cechy odpowiada wynikowi pomiaru, a odchylenie standardowe odpowiada błędowi względnemu pomiaru. Kiedy jednak ma sens ocenianie dokładności pomiaru na podstawie błędu względnego ?

Weźmy pod uwagę pomiar temperatury powietrza, wykonany w dwóch różnych miejscowościach, w dwóch różnych skalach. Niech wynikiem pierwszego pomiaru będzie $-15^{o}\pm 0{,}5^{o}C$, a drugi $5^{o}\pm 0{,}5^{o}F$. Tak więc w pierwszym przypadku błąd względny wynosi 10/3%, a w drugim 10%; może to skłaniać do przypuszczenia, że pierwszy pomiar jest trzykrotnie dokładniejszy niż drugi. Gdy jednak pierwszy pomiar wyrazi się w skali Fahrenheita jako $5^{o}\pm 0{,}9^{o}F$, wówczas jego błąd względny wynosi 18%. Sugeruje to, że pomiar drugi jest 1,8 raza dokładniejszy od pierwszego. Łatwo też zauważyć, że zastosowanie tylko jednej ze skal temperatury np. Celsjusza, może dostarczyć paradoksalnych wyników, np.: przy tej samej wielkości błędu bezwzględnego, błąd względny w zależności od wyniku pomiaru jest funkcją nieciągłą i nieograniczoną w zerze. Ostatecznie można stwierdzić, że ocena dokładności pomiaru na podstawie błędu względnego ma sens wówczas, gdy wyniki pomiarów w różnych skalach są do siebie proporcjonalne.

Wyłania się tu jeszcze jeden problem związany z pewnymi ambiwalentnymi odczuciami badaczy wobec wartości tego współczynnika. Jeśli bowiem traktuje się współczynnik zmienności jako miarę błędu względnego, wówczas oczekuje się tego, aby jego wartości były jak najmniejsze. Duże wartości V_x są z tego punktu widzenia niekorzystne. Jeśli z drugiej strony traktuje się współczynnik zmienności jako miarę zmienności cechy (ta interpretacja w zastosowaniach przeważa), to biorąc pod uwagę moc dyskryminacyjną cechy, oczekuje się wartości jak największych.

Niekorzystne są natomiast wartości małe. Widać, że o uzyskanych wartościach współczynnika wypowiadać się można w różny sposób, zależny od przyjętego celu badania.

Jednak ze stosowaniem współczynnika zmienności wiążą się jeszcze inne trudności, odnoszące się do zakresu, w którym znaleźć się mogą jego wartości.

Określenie V_x w procentach, może skłaniać do przypuszczenia (choć nie jest to warunek wystarczający), że zmienność jego waha się od 0 do 100 i takich wyników oczekują zwykle praktycy niezbyt biegli w teorii statystyki. Jednakże wyniki empiryczne często wykraczają poza wartość 100%. Powstaje wówczas problem interpretacji otrzymanych wyników. Dla przykładu V_x = 33%, przy zakresie tego współczynnika 0-100 (gdzie 100 jest ograniczeniem górnym), jest relatywnie zbliżone do V_x = 100%, gdy zakres tego współczynnika wynosi 0-300 (gdzie 300 jest ograniczeniem górnym). Z kolei bardziej szczegółowa analiza współczynnika zmienności pozwala stwierdzić, że w niektórych sytuacjach jego maksymalna wartość w ogóle nie może osiągnąć 100%.

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie problemów związanych z zakresem wartości współczynnika w kontekście stosowanych w analizie badawczej skal pomiaru.

2. Pomiar i skale pomiaru

Zastosowanie statystyki w badaniach wiąże się z przeprowadzeniem pewnych operacji na symbolach, którymi najczęściej są liczby. Symbole, w tym naturalne liczby, są rezultatem postępowania zwanego pomiarem. Nie prowadząc głębszej dyskusji metodologicznej (por. Stevens (1971a, 1971b), Burton (1971), Shinn Jr. (1974), można przyjąć za Acknoffem (1965), że pomiar to ... sposób uzyskiwania symboli przedstawiających własności przedmiotów, zdarzeń lub stanów, które to symbole pozostają w takim samym istotnym związku między sobą jak przedstawiane przez nie rzeczy. W nauce pojęcie pomiaru rozumiane jest dwojako:

(1) w węższym sensie, gdy określone liczby uzyskuje się poprzez zastosowanie stałej jednostki pomiaru. W ten sposób rozumiany jest pomiar na gruncie nauk ścisłych, takich jak fizyka, czy chemia.

(2) w szerszym sensie, gdy stosowane procedury są mniej precyzyjne. Nie występuje wówczas stała jednostka pomiaru, natomiast rezultatem pomiaru jest tylko stwierdzenie występowania (lub niewzstępowania) określonych własności (reprezentowanych przez symbole) u badanych obiektów. Ten rodzaj pomiaru charakteryzowany jest dla wielu nauk, w tym społecznych jak np.: socjologia, czy geografia ekonomiczna, które znajdują się w stadium proteoretycznym.

Procedura pomiaru wymaga wykorzystania określonych skal pomiaru, które przedstawiono w dalszej części pracy.

2.1. Formalna definicja skali pomiaru

W literaturze naukowej występują cztery podstawowe rodzaje skal pomiaru (oraz ich pewne odmiany), a mianowicie nominalna, porządkowa, interwałowa oraz ilorazowa (por. Stevens (1971a)). Skale te muszą oczywiście spełniać własności formalnej definicji skali, istniejącej na gruncie matematycznej teorii pomiaru (por. Suppes, Zinnes (1971), R. Wójcicki (1974).

Z definicją formalną skali wiążą się dodatkowe pojęcia, takie jak: system relacyjny, system numeryczny i system empiryczny.

System relacyjny jest ciągiem skończonym postaci: $\mathcal{U} = \langle A, R_1, ..., R_n \rangle$, gdzie A jest niepustym zbiorem elementów nazywanym dziedziną systemu relacyjnego $\mathcal{U}$, a $R_1, ..., R_n$ są relacjami na A.

System relacyjny nazywa się empirycznym, jeśli jego dziedzina A jest zbiorem obiektów empirycznych, takich jak: ludzie, obiekty materialne itp.

System relacyjny nazywa się numerycznym ($\mathcal{R}$), jeśli jego dziedzina A jest zbiorem liczb rzeczywistych.

Formalnie można skalę pomiaru definiować jak następuje:

Skalą pomiaru nazywa się uporządkowaną czwórkę $\langle \mathcal{U}, \mathcal{R}, \mathcal{G}, \mathcal{P} \rangle$, gdzie $\mathcal{U}$ jest empirycznym systemem relacyjnym, $\mathcal{R}$ jest numerycznym systemem relacyjnym, $\mathcal{G}$ jest rodziną homomorfizmów lub izomorfizmów systemu $\mathcal{U}$ w $\mathcal{R}$, natomiast $\mathcal{P}$ jest rodziną bijekcji $\mathcal{R}$ na $\mathcal{R}$. Dla dowolnych $f, g \in \mathcal{G}$ istnieje $s \in \mathcal{P}$ takie, że $g = s \cdot f$. Stąd podaje się również definicję formalną skali w postaci uporządkowanej trójki $\langle \mathcal{U}, \mathcal{R}, f \rangle$ (por. Suppes, Zinnes (1971)), gdzie f jest konkretną funkcją odwzorowującą izomorficznie lub homomorficznie system $\mathcal{U}$ w system $\mathcal{R}$.

2.2. Skale nominalne

Pomiar w skali nominalnej polega na arbitralnym przypisaniu badanym obiektom liczb ze względu na pewne cechy, którymi obiekty te się charakteryzują. Tak więc odwzorowanie $\mathcal{U}$ w $\mathcal{R}$ odbywa się poprzez rodzinę $\mathcal{G}$, której elementy są w tym przypadku dowolnymi (lecz jedno-jednoznacznymi) zasadami przypisywania liczb elementom rodziny $\mathcal{U}$. Zatem w przypadku skali nominalnej, $\mathcal{P}$ jest zbiorem wszystkich bijekcji. Procedura przypisywania może być zrealizowana w dwojaki sposób:

(1) poprzez przypisanie liczb pewnym klasom, utworzonym po uwzględnieniu własności badanych elementów,

(2) poprzez przypisanie liczb bezpośrednio własnościom badanych elementów.

Oba podejścia prowadzą do rozłącznej i wyczerpującej klasyfikacji badanych elementów, a liczby lub ich kombinacje (występują przy drugim sposobie przypisania) pełnią jedynie rolę nazw wyróżniających klas. Na liczbach tych nie można przeprowadzać operacji matematycznych. Klasycznym przykładem nonsensów działań arytmetycznych w tej skali jest nadawanie interpretacji sumie numerów pokoi hotelowych lub sumie numerów graczy drużyny piłkarskiej. Należy jednak zaznaczyć, że poszczególne klasy mogą się charakteryzować pewnymi liczebnościami i takie operacje, jak obliczanie proporcji, odsetek lub stosunków jest dopuszczalne (por. Blalock (1975)). Właściwością logiczną skali nominalnej jest relacja równości, która jest symetryczna i przechodnia. Szczególnym przypadkiem skali nominalnej w naukach społecznych jest skala dychotomiczna, w której dla oznaczenia klas wykorzystuje się tylko dwie liczby 0 i 1.

2.3. Skale porządkowe

Pomiar w skali porządkowej pozwala na uporządkowanie sklasyfikowanych obiektów. Zazwyczaj przyjmuje się, że wprowadzony porządek jest porządkiem liniowym tzn. jest relacją zwrotną, przechodnią, antysymetryczną (lub asymetryczną) i spójną. Odwzorowanie $\mathcal{U}$ w $\mathcal{R}$ określa się tak, aby dla dwóch elementów z $\mathcal{U}$, elementowi wcześniejszemu była przyporządkowana liczba mniejsza. Tak więc w przypadku skali porządkowej $\mathcal{P}$ jest zbiorem wszystkich funkcji rosnących. Uporządkowanym elementom można nadać pewne rangi poprzez przypisanie im określonych numerów. Zatem pomiar w skali porządkowej jest precyzyjniejszy aniżeli w skali nominalnej, bowiem pozwala nie tylko na grupowanie elementów w klasy, ale także pozwala na uporządkowanie tych klas. Przykładem pomiaru w skali porządkowej może być określanie twardości minerałów według skali Mohsa lub prędkości wiatru w skali Beauforta.

2.4. Skale interwałowe

Pomiar w skali interwałowej odpowiada wymienionemu wcześniej pierwszemu rozumieniu tego pojęcia, tzn. jest to pomiar w węższym znaczeniu, w którym występuje arbitralna jednostka miary. W efekcie możliwe jest w tym przypadku nie tylko uporządkowanie (rangowanie) obiektów ze względu na stopień posiadania określonej własności, ale możliwa jest również ocena odległości pomiędzy obiektami. Istotnym ograniczeniem tych skal jest jednak występowanie zera umownego. Oznacza to, że różne skale interwałowe mogą mieć różne, bardzo odbiegające od siebie, punkty zerowe. Oczywiście wyniki pomiaru osiągnięte w różnych skalach, mogą być przetransformowane jedne w drugie poprzez odpowiednie odwzorowania liniowe. Łatwo można np. przekształcić skalę temperaturową Celsjusza w skalę Fahrenheita i na odwrót. Jednakże arbitralne zero występujące w skalach interwałowych utrudnia wykonywanie operacji arytmetycznych na liczbach odpowiadających parametrom zmierzonym w tych skalach. Dotyczy to np. dodawania i mnożenia, które wymagają w takim przypadku specjalnego objaśnienia. W konsekwencji prowadzić to może do trudności w wyznaczaniu niektórych parametrów statystycznych jak np. analizowanego tutaj współczynnika zmienności V_x.

W skalach interwałowych dopuszczalne są natomiast wszystkie operacje arytmetyczne na różnicach pomiędzy parami liczb (por. Ackoff (1969)). Z formalnego punktu widzenia w przypadku skal interwałowych $\mathcal{P}$ jest zbiorem wszystkich liniowych funkcji rosnących $x' = ax + b$, gdzie $a>0$.

2.5. *Skale ilorazowe*

Skale ilorazowe pozwalają na najbardziej precyzyjne pomiary. W tych skalach spełnione są następujące relacje (por. Stevens (1971)) równości, uporządkowania rangowego, równości interwałów oraz równości ilorazów. Podstawową cechą tych skal jest założenie o istnieniu zera bezwzględnego. Wobec liczb będących wynikami pomiaru w skalach ilorazowych, stosować można wszystkie operacje arytmetyczne a także wszystkie rodzaje miar statystycznych (por. tabela 1). W odniesieniu do tych skal $\mathcal{F}$ jest rodziną wszystkich funkcji $x' = ax$, przy $a>0$. Zatem wartości liczbowe mogą być transformowane poprzez pomnożenie każdej wartości x przez pewną stałą a. Jednostki pomiaru w skalach ilorazowych są przyjętymi na drodze konwencji standardami, np. jednostką długości jest metr. Toteż korzystając z przekształcenia $x' = ax$, każdą odległość można przedstawić w skali ilorazowej jako wielokrotność lub część metra. Podobnie sytuacja wygląda w odniesieniu do innych jednostek pomiaru. Zasadniczo wyróżnia się (głównie w fizyce) dwa rodzaje skal ilorazowych.

(a) podstawowe - reprezentowane przez długość, masę i opór elektryczny,

(b) pochodne - reprezentowane przez gęstość, siłę i elastyczność.

Jednak w naukach społecznych, ze względu na brak standardowego układu jednostek pomiaru, powyższy podział skal ilorazowych nie ma tak istotnego znaczenia.

Na podstawie tabeli 1 można zauważyć, że istniejące w teorii pomiaru, skale pomiaru - tworzą swego rodzaju hierarchię. Skalą najbardziej prymitywną w zakresie możliwości pomiarowych jest skala nominalna, a każdy następny rodzaj skali rozszerza możliwości pomiarowe oraz ma własności skal znajdujących się na niższych szczeblach hierarchicznych. Można też stwierdzić, że najbardziej podstawową w sensie pożądanych możliwości pomiarowych jest skala ilorazowa. Z punktu widzenia niniejszej pracy należy szczególnie podkreślić fakt, że współczynnik zmienności może być stosowany tylko w odniesieniu do liczb, które są wynikiem pomiaru w skali ilorazowej.

3. WŁASNOŚCI STATYSTYCZNE WSPÓŁCZYNNIKA ZMIENNOŚCI

Stwierdzono wcześniej, że zakres zmienności współczynnika V_x może być w praktyce badawczej bardzo zróżnicowany. Przedstawione poniżej rozważania teoretyczne pokazują, jak zmieniają się wartości V_x, gdy pomiar zmiennej losowej X przeprowadzany jest w skali ilorazowej.

Twierdzenie. Niech X będzie nieujemną zmienną losową przyjmującą z prawdopodobieństwami dodatnimi skończenie wiele wartości. Jeżeli p jest najmniejszym dodatnim prawdopodobieństwem, z jakim X przyjmuje pewną wartość dodatnią, to:

$$0 \le E^{-1}(X)DX \le \sqrt{p^{-1}-1} \quad .$$

Tabela 1. System skal pomiarowych

Typ skali	Podstawowe relacje	Możliwe transformacje	Typowe przykłady	Przykłady miar statystycznych, invariantnych wobec transformacji dopuszczonych przez odp. typ skali			
				Tendencja centralna	Dyspersja	Korelacja	Testy
Nominalna	Równoważność	x'=f(x) gdzie f(x) oznacza dowolną funkcję wzajemnie jednoznaczną	Numerowanie pokoi w hotelu Numerowanie piłkarzy	Wartość modalna	Procent wartości	Wielodzielczość	Chi-kwadrat współczynnik phi
Porządkowa	Równoważność Większy, mniejszy niż	x'=f(x) gdzie f(x) oznacza dowolną funkcję rosnącą	Twardość minerałów, numeracja ulic	Mediana	Porcentyle Kwantyle	Rang Spearmana	Test znaku Test serii
Interwałowa	Równoważność Większy, mniejszy niż Równość dwóch interwałów	Dowolna transformacja liniowa x'=ax+b dla a>0	Temperatura (Fahrenheita lub Celsjusza) Kalendarz	Średnia arytmetyczna	Odchylenie standardowe	Korelacja iloczynowo momentowa	Test - t Test F
Ilorazowa	Równoważność większy, mniejszy niż Równość dwóch interwałów Równość ilorazów	x'=cx dla c>0	Liczebność Długość, gęstość Temperatura Kelwina	Średnia geometryczna Średnia harmoniczna	Współczynnik zmienności	Stosunek korelacyjny	

Źródło: D. Harvey (1969) (zmodyfikowana)

Dowód. Niech $x_1, x_2, \dots, x_n$ będą wszystkimi wartościami przyjmowanymi przez X z prawdopodobieństwami dodatnimi i niech $p_i = P\{X = x_i\}$, $i=1,2,\dots,n$. Wtedy

$$EX^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 = p^{-1} \sum_{i=1}^{n} p p_i x_i^2 \le p^{-1} \sum_{i=1}^{n} p_i^2 x_i^2 \le p^{-1} \Big(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\Big)^2 = p^{-1} E^2 X.$$

Stąd

$$D^2 X \le (p^{-1} - 1) E^2 X$$

W przypadku obliczania współczynnika zmienności z próby n-elementowej mamy $p = n^{-1}$. Tak więc zakładając, że badana cecha jest nieujemna, widzimy, że maksymalną wartością współczynnika zmienności obliczonego z próby jest $(n-1)^{1/2}$.

Rozpatrzmy pzykładowo graniczne wartości $\hat{V}_x$, gdy $n \to \infty$, dla ciągu q-tych potęg kolejnych liczb naturalnych, gdzie $q = 0.5, 1, \dots, 4$. Obliczone wartości $\hat{V}x$ zestawiono w tabeli 2, natomiast rycina 1 jest graficzną prezentacją tych wyników.

Tabela 2. Wartości współczynnika zmienności dla kolejnych potęg liczb naturalnych

q	$\hat{V}_x$
0,5	35,4
1,0	57,7
1,5	75,0
2,0	89,4
2,5	102,1
3,0	113,4
3,5	123,7
4,0	133,3

Aby dla danego q obliczyć $\lim \hat{V}_x$, zauważmy, że funkcja $y = x^{1+q}$ jest dla $q>0$ ściśle wypukła, a więc dla $x_1 < x_2$,

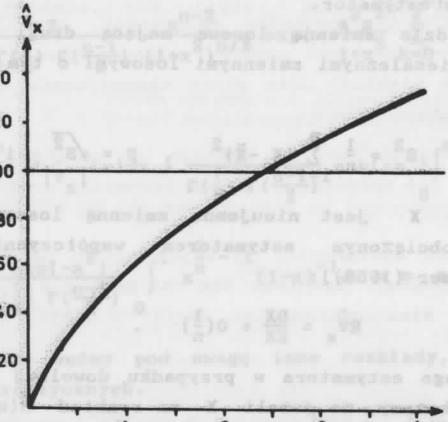
$$(1+q)(x_2 - x_1)x_1^q < x_2^{1+q} - x_1^{1+q} < (1+q)(x_2 - x_1)x_2^q$$

Kładąc $x_1 = (k-1)/n$, $x_2 = k/n$ i sumując te nierówności stronami po k od 1 do n dostaniemy stąd

$$(1+q)\frac{1}{n^{1+q}} \sum_{k=1}^{n-1} k^q < 1 < (1+q)\frac{1}{n^{1+q}} \sum_{k=1}^{n} k^q$$

co oznacza, że

$$\frac{1}{n^{1+q}} \sum_{k=1}^{n} k^q = \frac{1}{1+q} + \frac{\gamma}{n}, \text{ gdzie } 0 < \gamma < 1.$$



Ryc. 1. Zależność granicy współczynnika zmienności (przy $n \longrightarrow \infty$) q-tej potęgi zmiennej losowej, której wartościami są kolejne liczby naturalne od 1 do n przyjmowane z jednakowymi prawdopodobieństwami, od wartości q.

Stąd dla ciągu $1^q, 2^q, \ldots, n^q$ mamy

$$\hat{V}_x^2 - \frac{q^2}{1+2q} = \frac{(1+q)^2}{1+2q}\left(\frac{1+\frac{1+2q}{n}\gamma}{\left(1+\frac{1+q}{n}\theta\right)^2} - 1\right), \text{ gdzie } 0 < \gamma,\ \theta < 1.$$

Tak więc

$$\frac{(q+1)^2}{2q+1}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{q+1}{n}\right)^2} - 1\right) < \hat{V}_x^2 - \frac{q^2}{2q+1} < \frac{(q+1)^2}{n}$$

A zatem

$$\left|\hat{V}_x^2 - \frac{q^2}{2q+1}\right| < \frac{2(q+1)^2}{n}$$

skąd

$$\left|\hat{V}_x - \frac{q}{\sqrt{2q+1}}\right| < \frac{2(q+1)^2\sqrt{2q+1}}{nq}.$$

Czyli

$$\hat{V}_x = q(1+2q)^{-1/2} + O(1/n).$$

Widać, że w pewnych sytuacjach współczynnik zmienności w ogóle nie osiąga wartości 100%. I tak w przypadku ciągu $1, 2, \ldots, n$, $\hat{V}_x = 57{,}7\%$ a dla ciągu $1^2, 2^2, \ldots, n^2$, $\hat{V}_x = 89{,}4\%$.

3.1. Współczynnik zmienności a nieobciążoność

Szerokie wykorzystanie współczynnika zmienności jako parametru opisowego zbiorowości statystycznych wymaga sprawdzenia własności, które winien spełniać dobry estymator.

Niech X będzie zmienną losową mającą drugi moment i niech $X_1, X_2, \dots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie co X. Oznaczmy:

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \quad , \quad S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 \quad , \quad S = \sqrt{S^2} \quad \text{i} \quad \hat{V}_x = \frac{S}{\bar{X}} \quad .$$

Wiadomo, że jeżeli X jest nieujemną zmienną losową, to $\hat{V}_x$ jest asymptotycznie nieobciążonym estymatorem współczynnika zmienności; dokładniej (por. Cramer (1958)):

$$E\hat{V}_x = \frac{DX}{EX} + 0(\frac{1}{n}) \quad .$$

Stosowanie jednak tego estymatora w przypadku dowolnej zmiennej losowej jest niewskazane. Wykażemy, że jeżeli X ma rozkład $N(m,\sigma)$, to $\hat{V}_x$ jest estymatorem obciążonym, więcej nawet, że nie istnieje wartość oczekiwana tego estymatora. W tym celu obliczymy $E|\hat{V}_x|$. Oznaczając przez f_Z gęstość rozkładu zmiennej losowej Z, możemy napisać (por. Cramer (1958)):

$$f_{|\bar{X}|}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{n}{2}}\,\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\{\exp\,(-(\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{n}{2}}\,x-a)^2)+\exp(-(\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{n}{2}}\,x+a)^2)\} & \text{dla } x>0 \\ 0 \qquad \text{dla} \quad x\le 0 \ , \end{cases}$$

gdzie

$$a = \frac{m}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{n}} \ ,$$

$$f_S(x) = \begin{cases} (\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{n}{2}})^{n-1}\frac{2}{\Gamma(\frac{n-1}{2})}\,x^{n-2}\,\exp(-(\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{n}{2}}x)^2) & \text{dla} \quad x>0 \ , \\ 0 \qquad \text{dla} \quad x\le 0. \end{cases}$$

Oczywiście $f_{|\hat{V}_x|}(x) = 0$ dla $x\le 0$. Dla $x>0$ obliczamy

$$f_{|\hat{V}_x|}(x) = \int_0^\infty t\, f_{|\bar{X}|}(t)\, f_s(tx)dt =$$

$$= (\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{n}{2}})^n\frac{2x^{n-2}}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n-1}{2})}\,(\int_0^\infty t^{n-1}\exp(-(\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{n}{2}}t-a)^2-(\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{n}{2}}tx)^2)dt +$$

$$+ \int_0^\infty t^{n-1}\exp(-(\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{n}{2}}t+a)^2-(\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{n}{2}}tx)^2dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n-1}{2})}\,\frac{x^{n-2}}{(1+x^2)^{n/2}}\exp(-\frac{a^2x^2}{1+x^2})\int_0^\infty t^{-1/2}[(t^{1/2} +$$

$$+ \frac{a}{(1+x^2)^{1/2}})^{n-1} + (t^{1/2} - \frac{a}{(1+x^2)^{1/2}})^{n-1}]e^{-t}dt =$$

$$= \frac{2}{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{n-1}{2})} \frac{x^{n-2}}{(1+x^2)^{n/2}} \exp(-\frac{a^2x^2}{1+x^2}) \sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]} \binom{n-1}{2k} (\frac{a^2}{1+x^2})^k \Gamma(\frac{n-2k}{2}).$$

Stąd

$$E|\hat{V}_x| = \int_0^{\infty} x\, f_{|\hat{V}_x|}(x)dx \geq \frac{2}{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{n-1}{2})} \exp(-a^2) \int_0^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(1+x^2)^{n/2}} dx =$$

$$= \frac{\exp(-a^2)}{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{n-1}{2})} \int_0^1 x^{\frac{2}{n}-1} (1-x)^{-1} dx = \infty \quad \blacksquare$$

Dla przykładu weźmy pod uwagę inne rozkłady, często spotykane w zastosowaniach praktycznych.

(1) Rozkład gamma. Jest to rozkład o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} \exp(-bx) & \text{dla } x>0, \\ 0 & \text{dla } x \leq 0 . \end{cases}$$

Stąd

$$EX = \frac{a}{b}, \quad D^2X = \frac{a}{b^2},$$

a więc

$$\hat{V}_x = \frac{1}{\sqrt{a}} .$$

Jeśli przyjąć $a=1$, otrzymuje się wówczas rozkład wykładniczy, dla którego współczynnik zmienności równa się 100%.

(2) Rozkład dwupunktowy. Jest to rozkład zmiennej losowej X przyjmującej tylko wartości 0 i 1, przy czym $P\{X=1\} = p$, $P\{X=0\} = 1-p$. Wtedy $EX = p$ i $D^2X = p(1-p)$, a więc

$$\hat{V}_x = \sqrt{\frac{1}{p} - 1} .$$

4. WNIOSKI

W świetle przeprowadzonej wyżej analizy współczynnika zmienności można stwierdzić, co następuje:

1° Wartość oczekiwana współczynnika zmienności cechy o rozkładzie normalnym jest nieokreślona.

2° Współczynnik zmienności może być stosowany jedynie w odniesieniu do cech (zmiennych), których pomiar został przeprowadzony w skali ilorazowej.

3° Górne ograniczenie współczynnika zmienności, określonego dla cech obserwowanych w n-elementowej próbie, zależy tylko od liczebności tej próby. Przyjmowana niekiedy jako górne ograniczenie wartość 100% nie ma teoretycznego uzasadnienia.

4° Współczynnik zmienności bardziej opisuje typ rozkładu cechy (zmiennej losowej), aniżeli jej zmienność, jednak parametry rozkładu są lepszymi charakterystykami.

W rezultacie można stwierdzić, że współczynnik zmienności V_x jako miara zmienności względnej powinien być w praktyce stosowany bardzo ostrożnie i zawsze ze świadomością typu skali, w jakiej dokonano pomiaru badanej cechy.

LITERATURA

Ackoff, R.L. (1969). *Decyzje optymalne w badaniach stosowanych*. PWN, Warszawa.

Anderson, N.H. (1987). Scales and statistics. Parametric and Nonparametric. W *Contemporary problems in statistics*. B. Lieberman ed. Oxford Press University, New York, 29-39.

Blalock, H.M. (1975). *Statystyka dla socjologów*. PWN, Warszawa.

Burton, A. (1971). Measurement and statistics. W *Contemporary problems in statistics*. B. Lieberman ed. Oxford Press University, New York, 8-14.

Chojnicki, Z. (1973). Założenia i perspektywy rozwoju geografii ekonomicznej. *Przegląd Geograficzny* XLV, 1, 3-27.

Cramer, H. (1958). *Metody matematyczne w statystyce*. PWN, Warszawa.

Greenwald, W.J. (1963). *Statistics for economics*. Merrill Books. Inc., Columbus, Ohio.

Harvey, D. (1969). *Explanation in Geography*. Wiley, London.

Lange, O. i Banasiński, A. (1970). *Teoria statystyki*. PWE, Warszawa.

Nowak, L. (1970). *Metodologia badań socjologicznych*. PWN, Warszawa.

Shinn, A.M. Jr. (1974). Relations between scales. W *Measurement in the social sciences*. H.M. Blalock ed. Aldin Publishing Company, Chicago, 121-158.

Stevens, S.S. (1971a). On the theory of scales and measurement. W *Contemporary problems in statistics*. B. Liberman ed. Oxford Press University, New York, 3-8.

Stevens, S.S. (1972b). Measurement statistics and the schemapiric view. W *Contemporary problems in statistics*. B. Lieberman ed. Oxford Press University, New York, 101-114.

Szulc, S. (1952). *Metody statystyczne*. TI, PWE, Warszawa.

Szulc, B. (1968). *Statystyka dla ekonomistów*. PWE, Warszawa.

Wójcicki, R. (1974). *Metodologia formalna nauk empirycznych*. PWN Warszawa.

Yule G.U. i Kendall, M.G. (1966). *Wstęp do teorii statystyki*. PWN, Warszawa.

Praca wpłynęła 8 lutego 1988:
w wersji ostatecznej 8 marca 1989.

ON SOME PROBLEMS OF THE APPLICATION OF THE COEFFICIENT OF VARIATION

Summary

The present work deals with the coefficient of variation V_x which in the literature is called a relative measure of the variation of a random variable X. It has been shown that for a random variable with a normal distribution the coefficient V_x should not be calculated because in this case it has no expected value; hence, the estimator of the coefficient of variation is biased. Thus, the values of the coefficient V_x are strongly dependent on the scale on which the random variable X is measured. Practically, only measurements carried out on a ratio scale can be analysed using the coefficient V_x.